Préparation à l'Agregation externe
Problème à remettre le 18 janvier
On traitera les 2 premières parties

1982

Composition d'analyse

INTRODUCTION.

6326. Dans tout le problème, E_0 (resp. L^1) désigne l'espace vectoriel des fonctions (resp. classes de fonctions) continues et bornées sur $\mathbf{R}^2$ (resp. intégrables pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$), à valeurs complexes.

E_1 est l'ensemble des éléments de E_0 dont la classe appartient à L^1; comme c'est l'usage, on notera par une même lettre une classe de fonctions et un représentant de cette classe.

On pose :

$$\|f\|_\infty = \sup(\{|f(u,v)|/(u,v) \in \mathbf{R}^2\}) \quad \text{pour} \quad f \in E_0,$$

et

$$\|f\|_1 = \iint_{\mathbf{R}^2} |f(u,v)| \, du \, dv \qquad \text{si} \qquad f \in L^1;$$

on abrège en « p.p. » l'expression « presque partout », et en « $\iint$ » le signe « $\iint_{\mathbf{R}^2}$ ».

Si f est une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ et si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie par $f_{a,b}(x,y) = f(a+x, b+y)$; a étant > 0, Δ_a représente l'ensemble des $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$. On rappelle enfin que $\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand le réel a tend vers $+\infty$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ vaut $\sqrt{\pi}$.

Les quatre parties sont dépendantes, mais on peut traiter chacune en admettant les résultats de celles qui précèdent.

PREMIÈRE PARTIE.

1° ***a)*** Soit f et g appartenant à L^1; montrer — par exemple à l'aide du théorème de Fubini — que la quantité

$$(f * g)(x,y) = \iint f(x-u, y-v) g(u,v) \, du \, dv$$

est définie pour presque tout (x,y), que $f * g \in L^1$ et que $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Si $g \in E_1$, établir que $f * g$ appartient aussi à E_1 et majorer $\|f * g\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_1$ et $\|g\|_\infty$.

$i(ux+vy)$ ***b)*** f étant toujours dans L^1, on pose $\hat{f}(x,y) = \iint f(u,v) e^{i(ux+vy)} du \, dv$ pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$; prouver que $\hat{f} \in E_0$ et que, si $g \in L^1$, $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

2° ***a)*** Soit $\lambda > 0$; pour $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ et $a > 0$, on pose

$$I_{u,v}(a) = \iint_{\Delta_a} \frac{e^{i(ux+vy)} \sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dx \, dy$$

Mettre $I_{u,v}(a)$ sous forme du produit de deux intégrales simples; montrer qu'il est borné indépendamment de (u,v,a) et que, lorsque a tend vers $+\infty$, $I_{u,v}(a)$ tend vers : π^2 si $(u,v) \in \mathring{\Delta}_\lambda$ (intérieur de Δ_λ) et 0 si $(u,v) \notin \Delta_\lambda$.

b) Lorsque $f \in L^1$, déduire du *a*, la limite de

$$\iint_{\Delta_a} \hat{f}(x,y) \frac{\sin \lambda x \sin \lambda y}{xy} dx \, dy$$

quand a tend vers $+\infty$.

c) On suppose que $f \in E_1$ et que $\hat{f} = 0$. Établir que $f(0,0) = 0$, puis que $f(a,b)$ est nul pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ (on pourra utiliser la fonction $f_{a,b}$).

3° f désigne un élément de L^1.

a) Montrer que $\|f_{a,b} - f\|_1$ tend vers 0 quand (a, b) tend vers $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (on pourra, par exemple, approcher f par des fonctions continues à support compact).

b) Prouver que, si $f * g = 0$ pour tout $g \in E_1$, alors $f = 0$ p.p.

c) Déduire des résultats précédents que, si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.

4° K est un compact de $\mathbb{R}^2$ et μ_K sa fonction caractéristique.

a) Vérifier que, pour y (resp. x) réel fixé, $\hat{\mu}_K(x, y)$ est une fonction analytique de x (resp. y).

Montrer que, si la fonction $\hat{\mu}_K$ est nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, elle l'est alors sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. A quelle condition sur K en est-il ainsi ?

b) **Application.** — On suppose que $\mathring{K}$ n'est pas vide.

Soit $f \in L^1$, telle que $\displaystyle\iint_{t(K)} f(u, v)\, du\, dv$ soit nulle pour toute translation t du plan affine $\mathbb{R}^2$; démontrer qu'alors f est nulle presque partout.

5° Soit K′ et K″ deux compacts de $\mathbb{R}^2$, « réguliers » en ce sens que chacun est l'adhérence de son intérieur.

On suppose que, pour toute droite affine L, $L \cap K'$ et $L \cap K''$ ont la même longueur (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$).

a) Établir que $\hat{\mu}_{K'}(x, y) = \hat{\mu}_{K''}(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (on pourra commencer par le cas où $x = 0$).

b) En déduire que $\mathring{K}''$ est inclus dans K′, puis que K′ = K″.

Deuxième partie.

On note S l'ensemble des fonctions $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ qui ont la propriété suivante : $P(x, y) \dfrac{\partial^{k+l}\psi}{\partial x^k\, \partial y^l}(x, y)$ est borné sur $\mathbb{R}^2$ pour tous k, l entiers $\geqslant 0$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x, y]$.

1° ψ désigne, dans cette question, un élément de S.

a) Vérifier que S est inclus dans L^1; démontrer que $\hat{\psi}$ est indéfiniment différentiable et appartient à S (on pourra montrer que, si l'on pose

$$\psi_1(u, v) = \frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v), \quad \text{on a} \quad x\hat{\psi}(x, y) = i\hat{\psi}_1(x, y).$$

b) Si $\omega \in S$, prouver que

$$\iint \psi\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right)\hat{\omega}(u, v)\, du\, dv = \iint \omega\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right)\hat{\psi}(u, v)\, du\, dv \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Calculer explicitement $\hat{\omega}(x, y)$ pour la fonction $\omega(u, v) = e^{-u^2-v^2}$.

c) Déduire de ce qui précède que $\psi(0, 0) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint \hat{\psi}(x, y)\, dx\, dy$, puis exprimer de manière analogue $\psi(a, b)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Établir que l'application $\psi \mapsto \hat{\psi}$ définit une bijection de S sur lui-même.

2° Soit $f \in L^1$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $\rho \in S$ telle que :

$$\hat{\rho}(x, y) = 1 \text{ si } (x, y) \in \Delta_1 \quad \text{et} \quad \hat{\rho}(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \notin \Delta_2.$$

Pour $\lambda > 0$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\rho_\lambda(u, v) = \frac{1}{\lambda^2}\rho\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \text{ et } h_\lambda(u, v) = \hat{f}(0, 0)\rho_\lambda(u, v) - (f * \rho_\lambda)(u, v).$$

b) Démontrer que $\|h_\lambda\|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ et que $\|f * \rho_\lambda - f\|_1$ tend vers 0 quand $\lambda \to 0_+$.

c) Déduire du premier résultat de *b* que, pour $\delta > 0$, il existe un voisinage V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $h \in L^1$ tels que

$$\|h\|_1 < \delta \quad \text{et} \quad \hat{h}(x, y) = \hat{f}(0, 0) - \hat{f}(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in V.$$

Énoncer et prouver un résultat analogue, où $(0, 0)$ est remplacé par un point quelconque (a, b) de $\mathbb{R}^2$.

3° Dans la suite de cette partie, on fixe une fonction $\varphi \in E_0$.

a) Vérifier que $f * \varphi$ conserve un sens pour tout $f \in L^1$, que $f * \varphi$ appartient alors à E_0, mais plus nécessairement à L^1.

Montrer que $(f * g) * \varphi = f * (g * \varphi)$ pour f et g appartenant à L^1.

b) On pose

$$I_\varphi = \{f \in L^1 / f * \varphi = 0\},$$
$$Z_\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \hat{f}(a, b) = 0 \quad \text{pour tout} \quad f \in I_\varphi\}.$$

Établir que I_φ est un sous-espace vectoriel fermé de L^1, stable pour $*$, et que Z_φ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

4° On suppose, dans le reste de cette partie, que Z_φ est vide.

a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, expliquer pourquoi il existe un voisinage V de (a, b), $f \in I_\varphi$ et $h \in L^1$ tels que

$$\hat{f}(a, b) = 1, \; \|h\|_1 < 1 \; \text{et} \; \hat{h}(x, y) = 1 - \hat{f}(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in V.$$

b) Soit g un élément de L^1, tel que $\hat{g}$ soit à support compact, inclus dans V. On définit la suite de fonctions (g_n) par : $g_0 = g$ et $g_{n+1} = h * g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\|_1$ est convergente et que la fonction $g_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est définie presque partout.

Calculer $\hat{g}_\infty$ en fonction de $\hat{g}$ et $\hat{h}$ uniquement.

c) Prouver que $g = g_\infty * f$ p.p. et que g appartient à I_φ. En déduire que, si ψ appartient à S et $\hat{\psi}$ est à support compact, alors $\psi \in I_\varphi$.

5° Démontrer que $I_\varphi = L^1$ (on pourra d'abord vérifier que ρ_λ appartient à I_φ pour tout $\lambda > 0$), puis que $\varphi = 0$.

Troisième partie.

Pour tout nombre complexe w, on note F_w la fonction définie par

$$F_w(z) = \exp\left[\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right], \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(w) z^n$ le développement de Laurent de F_w au point 0.

1° *a*) Pour quelles valeurs de z la série ci-dessus converge-t-elle vers $F_w(z)$? Comment peut-on calculer $J_n(w)$ en fonction de F_w ?

b) Soit Γ le cercle de centre O, de rayon 1, dans le plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique; montrer que :

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{w}{2}\right)^{n+2k} \int_\Gamma z^{-n-k-1} e^z \, dz$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c) Lorsque $n \in \mathbb{N}$, expliciter les coefficients de la série entière du *b*); quel est son rayon de convergence ?

2° *a*) Prouver que $\frac{d}{dw}(w^n J_n(w)) = w^n J_{n-1}(w)$ pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$.

b) Établir que

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - w \sin\theta) \, d\theta$$

pour $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que l'équation $J_1(x) = 0$ a, au moins, deux racines réelles > 0; on notera désormais J l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des zéros réels > 0 de la fonction J_1.

3° *a*) Soit r un réel > 0 et $D(r)$ le disque fermé de centre O et de rayon r dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Démontrer que $\hat{\mu}_{D(r)}(x, y) = 2\pi \int_0^r J_0(\rho\sqrt{x^2 + y^2}) \, \rho \, d\rho$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; en déduire que, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $\hat{\mu}_{D(r)}(x, y)$ vaut $\frac{2\pi r}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_1(r\sqrt{x^2 + y^2})$. Quelle est la valeur de $\hat{\mu}_{D(r)}(0, 0)$?

b) Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in E_0$, tels que $\mu_K * \varphi = 0$.

Montrer que, pour tout $(a, b) \in Z_\varphi$, on a $\hat{\mu}_K(a, b) = 0$ (Z_φ a été défini au 3° de la deuxième partie).

4° *Application.*

a) Soit $\varphi \in E_0$, ayant la propriété suivante :

(1) il existe deux réels > 0, r_1 et r_2 tels que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ et que $\iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy$ soit nulle pour tout disque D, de centre quelconque et de rayon $r \in \{r_1, r_2\}$.

Prouver que φ est identiquement nulle.

b) Vérifier que la conclusion de *a*) tombe en défaut si l'on ne suppose pas que $\frac{r_1}{r_2} \notin J$ (on pourra, par exemple, montrer que la fonction $\varphi(x, y) = \sin y$ a une intégrale nulle sur tout disque ayant pour rayon l'un quelconque des zéros réels > 0 de la fonction J_1).

5° Si f appartient à L^1 et vérifie la propriété (1) du *a*) est-elle nulle presque partout ?

Quatrième partie.

On note $\mathscr{D}$ le groupe des déplacements affines du plan $\mathbf{R}^2$; si K est un compact de $\mathbf{R}^2$, une fonction $\varphi \in E_0$ est dite *K-inerte* lorsque $\iint_{d(K)} \varphi(x, y)\,dx\,dy$ est nulle pour tout $d \in \mathscr{D}$.

On dit que K est *descriptif* lorsque 0 est la seule fonction K-inerte dans E_0.

1° Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$.

a) On suppose que $\hat{\mu}_K(0, 0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est, dans $\mathbf{R}^2$, identiquement nulle sur aucun cercle de centre 0. Démontrer qu'alors K est descriptif.

b) Pour x et y complexes, on pose encore

$$\hat{\mu}_K(x, y) = \iint \mu_K(u, v) e^{i(ux+vy)}\,du\,dv.$$

Prouver que la conclusion de *a*, demeure, si l'on suppose seulement que $\hat{\mu}_K(0, 0) \neq 0$ et que $\hat{\mu}_K$ n'est identiquement nulle sur aucun des

$$\Gamma_r = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 / x^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{pour } r > 0.$$

2° *a*) Montrer qu'aucun disque fermé n'est un compact descriptif.

b) Établir, par contre, que le compact délimité par une ellipse, non circulaire et non réduite à un segment, est descriptif.

c) Qu'en est-il pour un carré?

3° *a*) Soit $a < b$ et $c > 0$ trois nombres réels, et T le compact délimité par le triangle $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$.

$$r > 0 \text{ étant fixé, on pose : } x_t = t \text{ et } y_t = -it\sqrt{1 - \frac{r^2}{t^2}} \text{ pour } t \geqslant r.$$

Calculer explicitement $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ et démontrer qu'il existe un nombre complexe $k \neq 0$, indépendant de t, tel que la fonction $\hat{\mu}_T(x_t, y_t)$ soit équivalente à $\frac{k}{t^2} e^{ct}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Soit K_0 un compact dont tous les points ont une ordonnée $\leqslant 0$; prouver que $\hat{\mu}_{K_0}(x_t, y_t)$ reste borné lorsque $t \to +\infty$.

c) Établir que $K_0 \cup T$ est descriptif.

4° Démontrer que tout compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière est une ligne polygonale, est descriptif.

5° Soit K un compact convexe, d'intérieur non vide, dont la frontière Γ est un arc de classe C^1 par morceaux.

On suppose que Γ a, au moins, un point anguleux C, c'est-à-dire tel que les deux demi-tangentes en C à Γ soient distinctes.

Démontrer que K est descriptif.